Localisation de zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann

26 mars 2011

Anthony POELS

Introduction

L'hypothèse de Riemann -formulée en 1859 et l'un des problèmes de Hilbert les plus importants - porte sur la localisation des zéros de la fonction zêta de Riemann. (...). L'étude suivante a pour but de localiser les premiers zéros non triviaux. Pour cela, sera introduit le concept de fonctions holomorphes et de prolongemment analytique. On étudiera la fonction gamma d'Euler et bien évidemment la fonction ζ. Après avoir prolongé cette dernière à l'ensemble du plan complexe privé du point $s = 1$, on essaiera de prouver l'existence de zéros de partie réelle égale à 1/2 et on donnera une valeur approchée de certains de ces zéros.

1 La formule d'Euler MacLaurin

Nous établissons ici la formule d'Euler Maclaurin et définissons les polynômes et nombres de Bernoulli. Cette formule est très utile un calcul numérique et nous nous en servirons dans la suite pour évaluer la fonction gamma et la fonction zêta.

1.1 Polynômes et nombres de Bernoulli

Definition 1

On définit les polynômes de Bernoulli par récurrence par :

$$B_0 = 1$$

et tel que pour $p \geq 1$

$$B_p' = pB_{p-1} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 B_p(t)dt = 0$$

B_p est appelé le p-ième polynôme de Bernoulli et $b_p = B_p(0)$ est appelé le p-ième nombre de Bernoulli. $(p \in \mathbb{N})$

Proposition 1 *Il existe une unique suite de polynômes $(B_p)_p$ vérifiant les conditions précédentes*

Preuve
Par récurrence sur p montrons que B_p est de degré p et unique :

Initialisation : pour $p = 0$ la propriété est vérifiée par définition

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que B_p soit déterminé de manière unique et de degré p. Alors comme $B_{p+1}' = (p+1)B_p$, B_{p+1} doit être de degré p+1.

Si on écrit $B_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} a_k X^k$, et $B_p = \sum_{k=0}^{p} c_k X^k$, en identifiant les coefficients, il vient :

$\forall k \in [|1, p+1|]$ on a $a_k = \frac{(p+1)}{k} c_{k-1}$ qui sont donc uniquement déterminé.

a_0 est lui uniquement déterminé par $\int_0^1 B_{p+1}(t)dt = 0$ qui donne : $a_0 = -\sum_{k=1}^{p+1} \int_0^1 a_k t^k dt$

Les calculs précédents nous assurent ainsi l'existence de B_{p+1} qui est de degré p+1 et unique, ce qui conclut la preuve.

Proposition 2 *On a les relations suivantes :*

$$B_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k X^{p-k} \qquad \text{pour } p \geq 1 \tag{1}$$
$$B_p(1-X) = (-1)^p B_p(X) \qquad \text{pour } p \geq 1 \tag{2}$$
$$B_p(0) = B_p(1) \qquad \text{pour } p \geq 2 \tag{3}$$
$$b_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k \qquad \text{pour } p \geq 2 \tag{4}$$
$$b_m = 0 \qquad \text{si } m \text{ est impair et } \geq 3 \tag{5}$$
$$B_p(2X) = 2^{p-1}\Big(B_p(X) + B_p(X+\frac{1}{2})\Big) \qquad \text{pour } p \in \mathbb{N} \tag{6}$$

Preuve

Pour (1) : on utilise Taylor. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $k \in [|0,p|]$ Par récurrence immédiate on a $B_p^{(k)}(X) = \frac{p!}{(p-k)!} B_{p-k}(X)$. On a donc :

$$B_p(X) = \sum_{k=0}^{p} \frac{B_p^{(k)}(0)}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{(p-k)!k!} B_{p-k}(0) X^k = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_{p-k} X^k$$

D'où le résultat en changeant de variable.

Pour (2) : On pose $Q_p = (-1)^p B_p(1-X)$ pour $p \in \mathbb{N}$. On constate que $(Q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses des polynômes de Bernoulli, donc par unicité on obtient (2).

Pour (3) : soit $p \geq 2$. On a $\int_0^1 B_{p-1}(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{p} B_p'(t)dt = \frac{1}{p}\Big(B_p(1) - B_p(0)\Big) = 0$. D'où (3).

Pour (4) : On a clairement (1) et (3) $\Rightarrow$ (4) en évaluant (1) en 1.

Pour (5) : on a clairement (2) et (3) $\Rightarrow$ (5), en évaluant en (2) en 0.

Pour (6) : pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $Q_p(X) = 2^{p-1}\Big(B_p(\frac{X}{2}) + B_p(\frac{X}{2} + \frac{1}{2})\Big)$. On montre que $(Q_p)_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèse des polynômes de Bernoulli, l'unicité de tels polynômes fournit le résultat.

Definition 2

Soit $p \in \mathbb{N}$. On définit la fonction $1-$périodique B_p^* par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad B_p^*(x) = B_p(\{x\}) = B_p(x - E(x))$$

Lemme 1 *Soit $p \geqslant 1$. Alors B_{2p+1} a exactement trois racines sur $[0,1]$, à savoir 0, $\frac{1}{2}$ et 1.*

Preuve

Par récurrence sur p.
Initialisation : Pour $p = 1$. On vérifie que $B_3(0) = B_3(\frac{1}{2}) = B_3(1) = 0$, et ce sont les seuls car B_3 est un polynôme de degré 3.
Hérédité : Soit $p \geqslant 2$ tel que le lemme soit vrai pour $p-1$.
D'après (5) et (6) de la proposition 2, 0, $\frac{1}{2}$ et 1 sont racines de B_{2p+1}. Montrons que ce sont les seules.
On identifie B_n et la fonction polynomiale associée (pour $n \in \mathbb{N}$). D'après l'hypothèse de récurrence, B_{2p-1} est de signe constant sur $[0,\frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2},1]$. Donc comme $B_{2p}' = 2pB_{2p-1}$, on en déduit que B_{2p} est monotone sur ces mêmes intervalles.
Par l'absurde, soit $r \in]0,\frac{1}{2}[$ tel que $B_{2p+1}(r) = 0$. Alors comme $B_{2p+1}' = (2p+1)B_{2p}$, soit $x_1 \in]0,r[$ et $x_2 \in]r,\frac{1}{2}[$ deux racines de B_{2p} (lemme de Rolle appliqué à B_{2p+1} sur ces deux intervalles).
Mais B_{2p} est monotone sur $[0,\frac{1}{2}]$, donc B_{2p} est nul sur $[x_1,x_2]$, d'où comme $x_1 \neq x_2$, il possède une infinité de racines, donc c'est le polynôme nul : absurde. De même si on suppose $r \in]\frac{1}{2},1[$.
Donc 0, $\frac{1}{2}$ et 1 sont les seules racines de B_{2p+1} sur $[0,1]$.

Lemme 2 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors B_{2p} est monotone sur les intervalles $[0,\frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2},1]$*

Preuve Corollaire immédiat du lemme précédent.

Proposition 3 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |B^*_{2p}(x)| \leq |b_{2p}| \quad et \quad b_{2p}(-1)^{p+1} > 0 \tag{7}$$

Preuve
Montrons le premier point de la proposition. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Comme $B'_{2p} = 2pB_{2p-1}$ et d'après le lemme 2, on en déduit que les extremum de B_{2p} sur $[0,1]$ sont 0, $\frac{1}{2}$ ou 1. Ce sont aussi ceux de B^*_{2p}. De plus d'après (6) de la propostion 2, on a : $|B_{2p}(\frac{1}{2})| = (1 - \frac{1}{2^{2p-1}})|b_{2p}| < |b_{2p}|$. D'où $\forall x \in [0,1] \quad |B^*_{2p}(x)| \leqslant |b_{2p}|$. Comme B^*_{2p} est $1-$périodique, on en déduit le résultat.
Pour le deuxième point, on procède par récurrence sur p.
Initialisation : pour $p = 1$ le résultat est vrai car $\frac{1}{6} \times (-1)^{1+1} > 0$
Hérédité : soit $p \geq 2$ tel que le résultat soit vrai pour $p-1$.
$b_{2p} \neq 0$ car sinon on aurait B_{2p} de signe constant sur $[0,1]$ d'après le lemme 2, et donc B_{2p+1} monotone donc nul, absurde.
D'autre part B_{2p} est continue, on se fixe donc $\varepsilon > 0$ tel que $(-1)^p B_{2(p-1)}$ soit positif sur $[0,\varepsilon]$ (hypothèse de récurrence). Donc $(-1)^p B_{2p-1}$ est croissante donc positif sur cet intervalle (car $B_{2p-1}(0) = 0$), donc $(-1)^p B_{2p}$ croissante sur $[0,\varepsilon]$. Or $(-1)^p B_{2p}$ est monotone et s'annule sur $[0, \frac{1}{2}]$ (lemme 2 et Rolle appliqué à B_{2p+1}), d'où nécessairement, $(-1)^p B_{2p}(0) = (-1)^p b_{2p} < 0$ i.e $(-1)^{p+1} b_{2p} > 0$, ce qui conclut la preuve.

1.2 La formule sommatoire d'Euler MacLaurin

Proposition 4 *Soit $N, M \in \mathbb{N}$ avec $N > M$. Soit f une fonction définie et de classe C^1 sur $[M,N]$. Alors :*

$$\sum_{k=M}^{N} f(k) \;=\; \int_M^N f(t)dt \;+ \frac{1}{2}\Big(f(M) + f(N)\Big) + \int_M^N B^*_1(t)f'(t)dt$$

Preuve
On part de :

$$\begin{aligned}
&\int_M^N B^*_1(t)f'(t)dt = \\
&= \textstyle\int_M^N (t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2})f'(t)dt = \sum_{k=M}^N \int_k^{k+1} (t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2})f'(t)dt \\
&= \textstyle\sum_{k=M}^N \int_0^1 (t - \frac{1}{2})f'(k+t)dt = \sum_{k=M}^N \Big(\Big[(t - \frac{1}{2})f(t+k)\Big]_0^1 - \int_0^1 f(t+k)dt\Big) \\
&= \textstyle\sum_{k=M}^N \frac{1}{2}\big(f(k) + f(k+1)\big) - \int_M^N f(t)dt = \sum_{k=M}^N f(k) - \frac{1}{2}\big(f(M) + f(N)\big) - \int_M^N f(t)dt
\end{aligned}$$

Formule d'Euler-MacLaurin *Soit $N, M \in \mathbb{N}$ avec $N > M$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit f une fonction définie et $2p+1$ fois dérivable sur $[M,N]$. Alors :*

$$\sum_{k=M}^{N} f(k) \;=\; \int_M^N f(t)dt \;+\; \frac{1}{2}\big(f(M) + f(N)\big) \;+\; \sum_{m=1}^{p} \frac{b_{2m}}{(2m)!}\Big(f^{(2m-1)}(N) - f^{(2m-1)}(M)\Big) \;+\; R_p$$

$$avec \qquad R_p = -\int_M^N \frac{B^*_{2p}(t)}{(2p)!} f^{(2p)}(t)dt = \int_M^N \frac{B^*_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t)dt$$

Preuve
On obtient $-\int_M^N \frac{B^*_{2p}(t)}{(2p)!} f^{(2p)}(t)dt = \int_M^N \frac{B^*_{2p+1}(t)}{(2p+1)!} f^{(2p+1)}(t)dt$ en intégrant par parties et du fait que $B^*_{2p+1}(M) = B^*_{2p=1}(N) = b_{2p+1} = 0$.
La formule s'obtient par récurrence en intégrant le reste par partie (en partant de la formule de la proposition précédente) et en prenant $\frac{1}{2p+2} B^*_{2p+2}$ comme primitive de B^*_{2p+1}. On peut remarquer que les B^*_n sont continues et que $B^*_n(N) = B^*_n(M) = B^*_n(0) = b_n$ pour $n > 1$.

2 Fonctions holomorphes, prolongement analytique

2.1 $\mathbb{C}$-dérivabilité

Definition 3
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en z_0 si et seulement si $\lim\limits_{z->z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe ($z \neq z_0$).

Definition 4

Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω, on note $f' : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z_0 & \longmapsto \lim\limits_{z->z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \end{cases}$

Une fonction $\mathbb{C}$-dérivable est dite holomorphe.

Les fonctions holomorphes représentent une généralisation sur les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la dérivation des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cependant, les fonctions holomorphes possèdent des propriétés beaucoup plus fortes que les fonctions dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 5 *La somme, le produit ou la composée de deux fonctions holomorphes est une fonction holomorphe. L'inverse d'une fonction holomorphe est holomorphe en tout point auquel la fonction ne s'annule pas.*

Preuve

Immédiat en écrivant $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$..

Definition 5

On appelle fonction analytique toute fonction qui peut s'exprimer localement comme somme d'une série entière convergente.

Proposition 6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe si et seulement si f est analytique.*

Preuve

$\Leftarrow$

(à faire, attendre cours séries de Fourrier)

$\Rightarrow$

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose $R = \rho(\sum a_n z^n)$ et on suppose $R > 0$.

On pose $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ définie sur $B(0,R)$. Montrons que f est holomorphe et que si $z \in B(0,R), alors f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$.

On pose $R' = \rho(\sum(n+1)a_{n+1}z^n$. Montrons que $R = R'$.

Si $R < R'$.

Soit z_0 tel que $R < |z_0| < R'$. Alors $\sum_0^{\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n$ converge absolument.

Or $|a_{n+1}z_0^{n+1}| \leq |z_0||(n+1)a_{n+1}z_0^n|$. Donc $\sum_0^{\infty} a_{n+1}z_0^{n+1}$ converge absolument, donc $\sum_0^{\infty} a_n z_0^n$ aussi : absurde.

D'où $R' \leq R$.

Si $R' < R$.

Soit z_0 et z_1 tels que $R' < |z_0| < |z_1| < R$.

$\{a_n z_1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné. Soit M tel que $\forall n\ |a_n z_1^n| \leq M$.

On a $|(n+1)a_{n+1}z_0^n| \leq (n+1)\frac{M}{|z_1^{n+1}|}|z_0^n| = \alpha_n$.

$\alpha_n = o(\frac{1}{n^2})$ car $\log(n^2\alpha_n) = 2\log(n) + \log(n+1) - \log|z_1| + \log(M) + n\log|\frac{z_0}{z_1}|$ Donc $\alpha_n \sim n\log|\frac{z_0}{z_1}| \to -\infty$.

D'où $\sum(n+1)a_{n+1}z_0^n$ converge : absurde. Donc $R' = R$.

Montrons que f est holomorphe. Soit $z_0 \in B(0,R)$.

Pour $z \in B(0,R)\backslash\{z_0\}$, on a :

$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(z^n - z_0^n)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n-1} z_0^{n-1-k}z^k$. On pose $v_n : \begin{cases} B(0,R) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto a_n \sum\limits_{n=0}^{n-1} z_0^{n-1-k}z^k \end{cases}$

v_n est continue. Montrons que $\sum v_n(z)$ converge $\forall z \in B(0,R)$.

Si $z \neq z_0$ c'est bon car alors $\sum v_n(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

Si $z = z_0$: $v_n(z_0) = na_n z_0^{n-1}$ si $n \neq 0$ (0 sinon). D'où comme $|z_0| < R$, $\sum_{k=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n$ converge.

On définit $D : \begin{cases} B(0,R) & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(z) \end{cases}$. Montrons que D est continue en z_0

Soit r tel que $|z_0| < r < R$. Montrons que $D_{|B(0,r)}$ est continue.

$||(v_n)_{|B(0,r)}||_\infty \leq |a_n \sum_{k=0}^{n-1}|z_0|^{n-k-1}r^k \leq n|a_n|r^{n-1}$. Et $\sum(n+1)|a_{n+1}|r^n < +\infty$ donc on a $\sum ||(v_n)_{|B(0,r)}|| < +\infty$. Comme chaque v_n est continue et que leur somme converge normalement sur $B(0,r)$, $D_{|B(0,r)}$ est continue.

Or z_0 est intérieur à $B(0,r)$, donc D est continue en z_0.

Finalement on obtient : $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n = D(z_0) = \lim\limits_{z->z_0} D(z) = \lim\limits_{z->z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

2.2 prolongement analytique

Une des propriétés remarquables des fonctions holomorphes est qu'elles sont déterminées globalement dès qu'on les connaît dans un voisinage ouvert quelconque d'un point où elles sont holomorphes.

Definition 6
Un domaine de $\mathbb{C}$ est un ouvert connexe et différent de $\emptyset$.

Definition 7
Soit $X \subset \mathbb{C}$. On dit que a est un point d'accumulation de X si $\forall \varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon)$ contient un point de X différent de a.
Autre formulation : a est un point d'accumulation de X si et seulement si il existe $(a_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $n \mapsto a_n$ soit injective et $a_n \to a$.

Proposition 7 *Soit f une fonction holomorphe définie sur un domaine Ω de $\mathbb{C}$.*

1. *S'il existe un point $\alpha \in \Omega$ tel que $f^{(n)}(\alpha) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, alors $f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$*
2. *[principe des zéros isolés]*
   Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres distincts de Ω telle que : $\lim\limits_{n->\infty} z_n = \alpha \in \Omega$ et $f(z_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, alors $f(z) = 0 \quad \forall z \in \Omega$

Preuve
Pour 1.
On pose $E_k = \left\{ z \in \Omega \quad | \quad f^{(k)}(z) = 0 \right\}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k$
Montrons que E est un fermé de Ω.
Chaque $f^{(k)}$ est continue (car ce sont des fonctions analytiques), donc $E_k = (f^{(k)})^{-1}(\{0\})$ est un fermé ($\forall k \in \mathbb{N}$).
D'où E fermé.
Montrons que E est un ouvert de Ω.
Soit $z_0 \in E$ et $r > 0$ tel que $B(z_0, r) \subset \Omega$. Le développement en série de Taylor de f en z_0 donne : $\forall z \in B(z_0, r) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k = 0$.
D'où $f_{|B(z_0,r)} = 0$, donc $f^{(k)}_{|B(z_0,r)} = 0 \quad \forall k \in \Omega$. D'où $B(z_0, r) \subset E$
E est donc un ouvert/fermé non vide ($\alpha \in \Omega$) de Ω qui est connexe donc $E = \Omega$.

Pour 2.
Montrons que $f^{(k)}(\alpha) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Par l'absurde.
Si ce n'est pas le cas, soit $m \geq 1$ tel que $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$ et $\forall j \in [|0, m-1|] \quad f^{(j)}(\alpha) = 0$.
Soit $r > 0$ tel que $B(\alpha, r) \subset \Omega$. Soit N tel que $\forall n \geq N \quad z_n \in B(\alpha, r)$. Soit $n \geq N$. Le développement en série de Taylor de f en α évalué en z_n donne :
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z_n - \alpha)^k = 0$. Comme les z_n sont distincts, on peut les supposer différents de α. Donc on obtient :
$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z_n - \alpha)^{k-m} = 0$, ce qui se réécrit :
$\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = o(1)$ d'où $\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} = 0$: absurde.
Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{(n)}(\alpha) = 0$ et on conclut avec 1.

Proposition 8 *[principe d'identité des fonctions holomorphes]*
Soient f, g deux fonctions holomorphes définies sur Ω domaine de $\mathbb{C}$.

1. *Si $f^{(m)}(\alpha) = g^{(m)}(\alpha) \quad \forall m \in \mathbb{N}$ avec $\alpha \in \Omega$, alors $f = g$.*
2. *Si $f(z_n) = g(z_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ avec $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de nombres distincts de Ω ayant un point d'accumulation $\alpha \in \Omega$, alors $f = g$.*

Preuve
Corollaire immédiat de la proposition précédente en posant $h = f - g$.

On utilise le principe des zéros isolés comme suit :
Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle dans un domaine Ω de $\mathbb{C}$. Si $f(\alpha) = 0$ avec $\alpha \in \Omega$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(\alpha, r) \subset \Omega$ et $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in B(\alpha, r)$ $\{\alpha\}$. On dit que α est un zéro isolé.

Definition 8
Soit $f : X \to \mathbb{C}$, $X \subset \mathbb{C}$ et $\neq \emptyset$. Soit V domaine de $\mathbb{C}$ tel que $X \subsetneq V$ et g une fonction holomorphe définie sur V telle que $f(z) = g(z) \quad \forall z \in X$. On dit que g est un prolongement analytique de f à V (ou dans V).

Proposition 9 *(Notations précédentes). Si X possède au moins un point d'accumulation $\alpha \in X$ (par exemple X contient un segment), alors un prolongement analytique g de f à un domaine V contenant X est unique (si un tel prolongement existe).*

Preuve Si h est une fonction holomorphe définie sur V telle que $h_{|X} = f$, alors $\forall z \in X \quad h(z) = f(z) = g(z)$.
D'après 2. de la proposition 8, $g = h$ dans V.

3 La fonction factorielle (fonction gamma d'Euler)

3.1 prolongement analytique de la fonction Π

Definition 9
On définit la fonction factorielle par :

$$\Pi(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx \qquad \Re(s) > -1$$

Cette notation a été introduite par Gauss, mais Legendre a introduit une autre notation $\Gamma(s) = \Pi(s-1)$. Cette nouvelle fonction est connue sous le nom de fonction gamma d'Euler. Pour la suite on utilisera plutôt Π.

Preuve
soits $\in \mathbb{C}$. Montrons que la fontion $x \mapsto e^{-x}x^s$ est intégrable sur $]0, +\infty$.
Déjà c'est une fonction continue sur cette intervalle. Elle est dominée par la fonction $x \mapsto e^{-x}x^{\Re(s)}$ qui est positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ Il faut prouver que l'intégrale est bien définie. (attendre cours sur intégrale).

Proposition 10 *La fonction Π est holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > -1$ (ou encore la fonction Γ est holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 0$).*

Preuve
Version holomorphe du thérorème de domination de Lebesgue..à creuser.

Proposition 11 *Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$. Alors on a :*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \qquad \Pi(s) = s\Pi(s-1)$$

Preuve
Le résultat provient d'une intégration par parties. On a :

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \textstyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s}e^{-t}d(t^s)\\ &= \left[\frac{1}{s}e^{-t}t^s\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\textstyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^s dt = \frac{1}{s}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^s dt\\ &= \frac{1}{s}\Gamma(s+1)\end{aligned}$$

Proposition 12 *La fonction Π se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}^*\}$ (ou encore la fonction Γ se prolonge analytiquement à $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$.)*

Preuve
Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la proposition précédente, on a par récurrence immédiate :
$\Gamma(s+n) = (s+n-1)\dots(s+1)s\Gamma(s)$
Le terme de gauche a un sens dès que $\Re(s) > -n$. On peut s'en servir pour définir $\Gamma(s)$.
On pose $D_n = \left\{z \in \mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\} \mid \Re(z) > -n\right\}$ On pose $\Gamma_n(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s+n-1)\dots s}$ pour $s \in D_n$. C'est une fonction holomorphe (par quotient et composition de fonctions holomorphes) et qui coïncide avec Γ_{n-1} sur D_{n-1}, d'où Γ_n est un prolongement analytique de Γ_{n-1} à D_n et donc un prolongement analytique de Γ à D_n.
On pose $\tilde{\Gamma}$ la fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$ par :
$\tilde{\Gamma}(s) = \Gamma_n(s)$ si $\Re(s) > -n$.
Cette fonction est bien définie et est un prolongement analytique de Γ sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$. On note encore Γ pour $\tilde{\Gamma}$.

3.2 Propriétés

Proposition 13 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\Pi(n) = n!$$

Preuve
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence immédiate on a à partir de l'équation fonctionnelle de Π : $\Pi(n) = n!\Pi(0)$, et d'autre part $\Pi(0) = \int_0^{\infty} \exp(-x)dx = \big[-\exp(-x)\big]_0^{\infty} = 1$

Proposition 14 *Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}\}$. Alors :*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \qquad \textit{ou encore} \qquad \Pi(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^z}{(z+1)\dots(z+n)}$$

Preuve
Soit $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle > 0. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit sur $\mathbb{R}^+$ la fonction f_n par $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad f_n(t) = (1 - t/n)^n t^{z-1}$ si $t \le n$ et nulle sinon.
On définit également sur $\mathbb{R}^+$ la fonction f par : $\forall \in \mathbb{R}^+ \quad f(t) = e^{-t}t^{z-1}$, continue et intégrable.
Pour tout $n \ge 1$, f_n est continue par morceaux et $(f_n)_n$ converge simplement vers f.
De plus, $\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad |f_n(t)| \le |f(t)|$ (car $(1-t/n)^n = \exp(n\log(1-t/n))$ et $\log(1+x) \le x$).
Par convergence dominée, on a donc :

$$\int_{\mathbb{R}^+} f_n(t)dt \to \int_{\mathbb{R}^+} f(t)dt = \Gamma(z)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_{\mathbb{R}^+} f_n(t)dt = \int_0^n (1-t/n)^n t^z \frac{dt}{t}$
En faisant le changement de variable $u = t/n$ et en intégrant par partie il vient :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^n \frac{dt}{t} = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du \\ &= \frac{n^z}{z}\int_0^1 (1-u)^n d[u^z] = \frac{n^z}{z}\Big(\Big[u^z(1-u)^n\Big]_0^1 + n\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^z du\Big) \\ &= n^z \frac{n}{z}\int_0^1 (u-1)^{n-1}t^z du \qquad \text{(puisque le crochet est nul)} \end{aligned}$$

Il vient alors par récurrence immédiate, en intégrant successivement par partie de cette manière :

$$I_n = \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n-1)}\int_0^1 u^{z+n-1}du = \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

Et comme I_n converge vers $\Gamma(z)$, on en déduit

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

On avait supposé $\Re(z) > 0$, mais on voit qu'avec la technique utilisée pour prolonger Γ que cette formule reste valable pour tout complexe de $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$. La version avec Π est obtenue par changement de variable et en utilisant le fait que $n^{z+1}/(z+n+1) \sim (n+1)^z$

Proposition 15 *[équation fonctionnelle]*
Soit $s \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}^*)$. Alors on a la relation suivante :

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \qquad \textit{ou} \qquad \Pi(s) = s\Pi(s-1)$$

Preuve
On a montré cette relation sur le demi-plan $\Re(s) > 0$. Par prolongement analytique, elle est vraie sur tout le domaine de définition de ces fonctions.

Proposition 16 *[formule des compléments]*
Soit $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Alors on a la relation suivante :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \qquad \textit{ou} \qquad \Pi(s)\Pi(-s) = \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}$$

Preuve
On peut le montrer grâce au développement eulérien du sinus et la formule de Γ sous la forme de "produit infini". Rappelons la première formule.

Soit $x \in]0,\pi[$. Alors :

$$\sin(x) = x\lim_{p\to\infty}\prod_{k=1}^{p-1}\Big(1 - \frac{x^2}{4p^2\tan^2(\frac{k\pi}{2p})}\Big) = x\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\Big)$$

Pour prouver la première partie de l'égalité, on part de la formule $\exp(z) = \lim(1+z/n)^n$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$P_n(x) = \frac{1}{2i}\Big((1+\frac{ix}{2n})^{2n} - (1-\frac{ix}{2n})^{2n}\Big)$$

On a alors :

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

P_n est un polynôme de degré $2n-1$ et de coefficient dominant égal à $\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^{2n-2}}$ (en développant par le binôme de Newton).
Soit $x \in \mathbb{C}$ racine de P_n. Alors $x \neq -2in$ et on peut écrire $(1+(ix)/(2n))^{2n} = (1-(ix)/(2n))^{2n}$.
Donc il existe $k \in [|0, 2n-1|]$ tel que

$$\frac{1+\frac{ix}{2n}}{1-\frac{ix}{2n}} = e^{i\frac{k\pi}{n}}$$

Après manipulation, il existe $k \in [|0, 2n-1|]\backslash\{n\}$ tel que $x = 2n\tan((k\pi)/(2n))$.
Réciproquement, tout complexe de cette forme est racine de P_n. Cela fait $2n-1$ racines, on en déduit que

$$\begin{aligned}
P_n(X) &= \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^{2n-2}} \prod_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n-1} \Big(X - 2n\tan(\frac{k\pi}{2n})\Big) \\
&= X\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^{2n-2}} \prod_{k=1}^{n-1} \Big(X - 2n\tan(\frac{k\pi}{2n})\Big)\Big(X + 2n\tan(\frac{k\pi}{2n})\Big) \\
&= X\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)^{2n-2}} \prod_{k=1}^{n-1} \Big(X^2 - 4n^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n})\Big) \\
&= X\prod_{k=1}^{n-1} \Big(\tan^2(\frac{k\pi}{2n}) - \frac{X^2}{4n^2}\Big) \\
&= X\Big(\prod_{k=1}^{n-1}\tan^2(\frac{k\pi}{2n})\Big)\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1 - \frac{X^2}{4n^2\tan^2(\frac{k\pi}{2n})}\Big)
\end{aligned}$$

Or $\prod_{k=1}^{n-1}\tan^2(\frac{k\pi}{2n}) = \prod_{k=1}^{n-1}\tan(\frac{k\pi}{2n})\tan(\frac{(n-k)\pi}{2n}) = 1$, ce qui fournit la première égalité recherchée.

Pour la deuxième égalité, on se fixe $x \in]0,\pi[$. Pour $p, k \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$U_{p,k} = -\log(1 - \frac{x^2}{4p^2\tan^2(\frac{k\pi}{2p})}) \qquad \text{si } k \leq p-1 \text{ et nul sinon}$$

D'après ce qu'on a déjà montré, on a

$$\log(\frac{\sin x}{x}) = -\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p-1} U_{p,k}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $V_k = -\log(1 - x/(k^2\pi^2))$. $V_k \geq 0$
Si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on a $\theta \leq \tan\theta$. Donc on a $\frac{k^2\pi^2}{4p^2} \leq \tan^2(\frac{k\pi}{2p})$, ce qui conduit à $U_{p,k} \leq V_k$
Montrons

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{p} U_{p,k} = \sum_{k=1}^{\infty} V_k$$

Déjà $\sum V_k$ converge puisque $V_k \sim \frac{x^2}{\pi^2k^2}$ et à k fixé $\lim_{p\to\infty} U_{p,k} = V_k$
Soit $\epsilon > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{k=N+1}^{\infty} V_k \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Soit $p \in \mathbb{N}$ $p > N$. Alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k - \sum_{k=1}^{p} U_{p,k} \geq \sum_{k=1}^{p} V_k - U_{p,k} \geq 0$$

On a donc

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{\infty} V_k - \sum_{k=1}^{p} U_{p,k}| &= \sum_{k=1}^{\infty} V_k - \sum_{k=1}^{p} U_{p,k} \\
&\leq \sum_{k=1}^{N}\Big(V_k - U_{p,k}\Big) + \sum_{k=N+1}^{\infty} V_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{N}\Big(V_k - U_{p,k}\Big) + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

D'autre part
$$\lim_{p\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\Big(V_k-U_{p,k}\Big)=0$$
Soit $N_0\in\mathbb{N},\ \ N_0>N$ tel que pour tout entier p supérieur à N_0
$\sum_{k=1}^{N}\Big(V_k-U_{p,k}\Big)\leq\frac{\epsilon}{2}$.
Pour tout $p\geq N_0$ $|\sum_{k=1}^{\infty}V_k-U_{p,k}|\leq\epsilon$. D'où le résultat. On en déduit la deuxième égalité.

En écrivant le produit $\Pi(x)\Pi(-x)$ sous forme de limite de "produit", on retrouve l'expression de la formule des compléments pour $0<x<1$. L'égalité est alors valable sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ par principe d'identité des fonctions holomorphes.

Proposition 17 *[relation de Legendre]*
Soit $s\in\mathbb{C}\backslash\{-\mathbb{N}^*\}$. Alors :
$$\Pi(s)=2^s\Pi(\frac{s}{2})\Pi(\frac{s-1}{2})\pi^{-\frac{1}{2}}$$

Preuve
On part de $\Pi(s/2)\Pi((s-1)/2)$ sous forme de produit infini. On retrouve facilement $\Pi(s)$. Pour montrer que l'autre partie converge vers $\pi^{\frac{1}{2}}/2^s$ on fait un développement limité en utilisant la formule de Stirling (pour s réel), puisqu'on a : $(s+n+1)\dots(s+2n)=\Pi(s+n+1)/\Pi(s+n)$. On prolonge alors par principe d'identité des fonctions holomorphes.
Remarquons qu'on se sert de la relation de Legendre pour déterminer A dans la formule de Stirling. Il y a donc un léger problème qu'on peut résoudre de la manière suivante. La formule de Stirling (avant d'évaluer A) nous donne la relation de Legendre sous la forme :
$$\Pi(s)=2^s\Pi(\frac{s}{2})\Pi(\frac{s-1}{2})\frac{\sqrt{2}}{e^A}$$
En évaluant en $s=1$, on obtient
$$\Pi(1)=2\Pi(\frac{1}{2})\Pi(0)\frac{\sqrt{2}}{e^A}$$
D'autre part, $\Pi(0)=\Pi(1)=1$ et en utilisant la formule des compléments, on a $\Pi(1/2)=\sqrt{\pi}/2$, ce qui achève la preuve sans arnaque.

Definition 10
On définit le logarithme complexe pour tout complexe de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ par
$$\log(re^{i\theta})=\log r+i\theta\qquad\text{où } r>0 \text{ et } -\pi<\theta<\pi$$

Proposition 18 log *est une fonction holomorphe vérifiant pour tout complexe z de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$* $\exp(\log(z))=z$

Proposition 19 *[formule de Stirling]*
Soit $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. On a alors :
$$\log\Gamma(z)=(z-\frac{1}{2})\log z-z+\frac{1}{2}\log(2\pi)-\int_0^{+\infty}\frac{B_1^*(t)}{z+t}dt$$
Ce qu'on peut écrire :
$$\log\Pi(z)=(z+\frac{1}{2})\log z-z+\frac{1}{2}\log(2\pi)-\int_0^{+\infty}\frac{B_1^*(t)}{z+t}dt$$

Lemme 3 *[Préliminaires pour la démonstration de la formule de Stirling]*
Soit $s\in\mathbb{R}^+$ et $N\in\mathbb{N}^*$. Alors
$$\sum_{n=1}^{N}\log(s+n)=\int_1^N\log(s+t)dt+\frac{1}{2}\big(\log(s+1)+\log(s+N)\big)+\int_1^N\frac{B_1^*(t)dt}{s+t}$$
La première intégrale peut être calculée en prenant $t\mapsto(s+t)\log(s+t)-(s+t)$ comme primitive de log.
La seconde intégrale converge quand N tend vers $+\infty$.
On posera pour la démonstration suivante :
$$A=1+\int_1^{\infty}\frac{B_1^*(t)dt}{t}$$

Preuve
La première formule est obtenue directement à l'aide de la proposition 4 (I/2) avec la fonction $f(t) = \log(s+t)$. Pour la convergence de l'intégrale, on a :

$$\int_1^N \frac{B_1^*(t)dt}{s+t} = U_N + C$$

où C est une constante indépendante de N et

$$U_N = \sum_{n=1}^N \log(s+n) - (s+N)\log(s+N) + (s+N) - \frac{1}{2}\log(s+N)$$

Montrons que U_n converge. Pour cela on effectue une transformation suite/série : On pose $V_n = U_{n+1} - U_n$ et on étudie la convergence $\sum_1^N V_n$.

$$\begin{aligned}
V_n &= \log(s+n+1) - (s+n+1)\log(s+n+1) + (s+n)\log(s+n) + (s+n+1) \\
&\quad - (s+n) - \tfrac{1}{2}\log(s+n+1) + \tfrac{1}{2}\log(s+n) \\
&= 1 - (s+n+\tfrac{1}{2})\log(s+n+1) + (s+n+\tfrac{1}{2})\log(s+n) \\
&= 1 - (s+n+\tfrac{1}{2})\log(1+\tfrac{1}{s+n}) \\
&= 1 - (s+n+\tfrac{1}{2})\Big(\tfrac{1}{s+n} - \tfrac{1}{2(s+n)^2} + O\big(\tfrac{1}{(s+n)^3}\big)\Big) \\
&= 1 - \Big(1 + \tfrac{1}{2(s+n)} - \tfrac{1}{2(s+n)} + O\big(\tfrac{1}{(s+n)^2}\big)\Big) = O(\tfrac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

D'où $\sum V_n$ converge donc U_n converge et l'intégrale $\int_1^N \frac{B_1^*(t)dt}{s+t}$ a bien une limite lorsque $N \to \infty$.

Preuve [de la formule de Stirling] Soit $s \in \mathbb{R}^+$. Pour évaluer $\log \Pi(s)$, on part de la définition :

$$\Pi(s) = \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(s+1)\dots(s+N)}(N+1)^s$$

La formule des compléments et le fait que $\Pi(n) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$ nous assurent que $\Pi(s)$ est un réel strictement positif. On peut donc passer au log et par continuité on a :

$$\begin{aligned}
\log \Pi(s) &= \lim_{N\to\infty} \Big(s\log(N+1) + \sum_{n=1}^N \log n - \sum_{n=1}^N \log(s+n)\Big) \\
&= \lim_{N\to\infty} \Big(s\log(N+1) + \int_1^N \log t\, dt + \frac{1}{2}\log N + \int_1^N \frac{B_1^*(t)dt}{t} \\
&\quad - \int_1^N \log(s+t)dt - \frac{1}{2}\big(\log(s+1) + \log(s+N)\big) - \int_1^N \frac{B_1^*(t)dt}{s+t}\Big) \\
&= \lim_{N\to\infty} \Big(s\log(N+1) + N\log N - N + 1 + \frac{1}{2}\log N + \int_1^N \frac{B_1^*(t)dt}{t} \\
&\quad - (s+N)\log(s+N) + (s+N) + (s+1)\log(s+1) - (s+1) \\
&\quad - \frac{1}{2}\log(s+1) - \frac{1}{2}\log(s+N) - \int_1^N \frac{B_1^*(t)dt}{s+t}\Big) \\
&= (s+\frac{1}{2})\log(s+1) + \int_1^\infty \frac{B_1^*(t)dt}{t} - \int_1^\infty \frac{B_1^*(t)dt}{s+t} \\
&\quad + \lim_{N\to\infty} \Big(s\log(N+1) + (N+\frac{1}{2})\log N - (s+N+\frac{1}{2})\log(s+N)\Big) \\
&= (s+\frac{1}{2})\log(s+1) + (A-1) - \int_1^\infty \frac{B_1^*(t)dt}{s+t} + \lim_{N\to\infty} \Big(s\log(\frac{N+1}{N+s}) - (N+\frac{1}{2})\log(1+\frac{s}{N}\Big) \\
&= (s+\frac{1}{2})\log(s+1) + A - 1 - \int_1^\infty \frac{B_1^*(t)dt}{s+t} - s
\end{aligned}$$

Avec $\Gamma(s+1) = \Pi(s)$, il ne reste plus qu'à évaluer A pour trouver la formule de Stirling version Γ. Pour la version avec Π, une étape supplémentaire est requise :

$$\int_0^1 \frac{B_1^*(t)dt}{s+t} = \int_0^1 \frac{(t-\frac{1}{2})dt}{s+t} = \int_0^1 \big(1 - \frac{s+\frac{1}{2}}{s+t}\big)dt = 1 - (s+\frac{1}{2})\log(\frac{s+1}{s})$$

D'où en remplaçant dans l'expression de $\log \Pi(s)$ que l'on avait, on obtient :

$$\log \Pi(s) = (s + \frac{1}{2}) \log s - s + A - \int_0^\infty \frac{B_1^*(t)dt}{s+t}$$

Il reste à évaluer la constante A. Pour cela on se sert de la relation de Legendre en passant à la limite. On a en posant $r(s) = \exp\big(-\int_0^\infty \frac{B_1^*(t)dt}{s+t}\big)$:

$$\Pi(2s) = \pi^{-1/2} 2^{2s} \Pi(s)\Pi(s - \frac{1}{2}) \qquad \text{et} \qquad \Pi(s) = s^{s+1/2} e^{-s} e^A r(s)$$

En injectant l'expression de droite dans celle de gauche on obtient :

$$(2s)^{2s+1/2} e^{-2s} e^A r(2s) = \pi^{-1/2} 2^{2s} s^{s+1/2} e^{-s} e^A r(s) (s - \frac{1}{2})^s e^{-s+1/2} e^A r(s - \frac{1}{2})$$

On a de plus $r(s) \to 1$ quand $s \to \infty$, donc pour s assez grand $r(s) \neq 0$. En simplifiant on obtient :

$$e^A = (2\pi)^{1/2} (1 - \frac{1}{2s})^{-s} e^{-1/2} \frac{r(2s)}{r(s) r(s - \frac{1}{2})}$$

Et en passant à la limite, $(1 - \frac{1}{2s})^{-s} \to e^{1/2}$, d'où :

$$e^A = (2\pi)^{1/2} \qquad \text{i.e} \qquad A = \frac{1}{2} \log(2\pi)$$

La formule de Stirling est vraie sur $\mathbb{R}^+$. Or les deux fonctions de chaque côté de l'égalité sont analytiques. Donc par principe d'identité des fonctions holomorphes, cette égalité reste vraie sur $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$. D'où le résultat.

(à préciser l'holomorphie des deux fonctions (surtout le log
Introduire le log complexe et justifier que $\Pi(s)$ n'appartient pas à $\mathbb{R}^-$)

4 La fonction zêta de Riemann

4.1 prolongement analytique de la fonction zêta de Riemann

Definition 11
On définit la fonction zêta de Riemann par :

$$\zeta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ s & \longmapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{array} \right.$$

où $\mathbb{D}$ est le demi-plan $\Re(s) > 1$

Proposition 20 *La fonction ζ est holomorphe.*

Preuve
Voir la preuve du prolongement analytique.

Proposition 21 *La fonction ζ se prolonge analytiquement sur* $\mathbb{C} \backslash \{1\}$

Preuve
On pose $f(x) = 1/x^s$ avec $s \in \mathbb{C}$ $x \in \mathbb{R}$ et $\Re(s) > 1$ de sorte que la série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

converge. On a alors :

$$f^{(r)}(x) = (-1)^r s(s+1)...(s+r-1)/x^{s+r} \qquad \text{où } r \in \mathbb{N} \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

On applique la formule d'Euler MacLaurin à f avec $M = 1$ et $N = n \in \mathbb{N}^*$ et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \quad = \quad \int_1^n x^{-s}dx \quad + \quad \frac{1}{2}(1+n^{-s}) \quad - \sum_{p=1}^{r} \frac{b_{2p}}{(2p)!} s(s+1)\dots(s+2r-2)\Big(n^{-s-2p+1}-1\Big) \quad + \quad R_r$$

où

$$\begin{aligned} R_r &= -\frac{s(s+1)\dots(s+2r-1)}{(2r)!} \int_1^n B_{2r}^*(x)x^{-s-2r}dx \\ &= -\frac{s(s+1)\dots(s+2r)}{(2r+1)!} \int_1^n B_{2r+1}^*(x)x^{-s-2r-1}dx \end{aligned}$$

Quand n tend vers l'infini, le membre de gauche tend vers $\zeta(s)$, la première intégrale du second membre tend vers $1/(s-1)$ car $\Re(s)>1$, les termes contenant une puissance de n tendent vers 0, et l'intégrale figurant dans le reste converge. A la limite on obtient ainsi :

$$\zeta(s) \;=\; 1/(s-1) \;+\; \frac{1}{2} \;+\sum_{p=1}^{r} b_{2p}s(s+1)\dots(s+2p-2)/(2p)! \;+\sigma_r(s)$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_r(s) &= -\frac{s(s+1)\dots(s+2r-1)}{(2r)!} \int_1^{+\infty} B_{2r}^*(x)x^{-s-2r}dx \\ &= -\frac{s(s+1)\dots(s+2r)}{(2r+1)!} \int_1^{+\infty} B_{2r+1}^*(x)x^{-s-2r-1}dx \end{aligned}$$

Pour obtenir cette formule, on a supposé $\Re(s)>1$, mais l'intégrale du reste converge pour $\Re(s)>1-2r$, et les autres termes du membre de droite sont des polynômes en s. On peut donc utiliser cette formule pour définir $\zeta(s)$ dans le demi-plan $\Re(s)>1-2r$, mis à part le point $s=1$. De plus, comme r est un entier >0 arbitraire, on obtient ainsi une définition de la fonction zêta valable dans tout le plan complexe privé du point $s=1$. L'intérêt de ces calcul est de nous donner une fonction holomorphe (ce que nous montrons ci-dessous) définie sur $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ qui coïncide avec la fonction ζ sur son domaine de définition. Le principe du prolongement analytique s'applique, et par unicité, on note encore ζ cette nouvelle fonction.

Pour montrer l'holomorphie, il suffit de montrer que le reste (défini avec l'intégrale) est holomorphe. On se sert encore du théorème utilisé pour Γ (truc de domination de Lebesgue version holomorphe), il faut que je le fasse.

Proposition 22 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :*

$$\zeta(1-2n) = -\frac{b_{2n}}{2n}$$

Preuve Le résultat ce déduit directement de la formule donnant le prolongement analytique. En effet, en choisissant $r=n$, le reste est nul et on obtient :

$$\zeta(1-2n) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\sum_{p=1}^{n} \frac{b_{2p}}{(2p)!}(-2n)(-2n+1)\dots(-2n+2p-1)$$

De plus on a $b_{2m+1}=0$ pour $m \in \mathbb{N}^*$, donc on peut réécrire :

$$\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{n} \frac{b_{2p}}{(2p)!}(-2n)(-2n+1)\dots(-2n+2p-1) = \sum_{p=1}^{n} \frac{b_{2p}}{(2p)!}(2n)(2n-1)\dots(2n-2p+1) \\ &= \sum_{p=1}^{n} b_{2p}\frac{(2n)!}{(2p)!(2n-2p)!} = \sum_{p=1}^{n} \binom{2n}{2p} b_{2p} = \sum_{p=2}^{2n} \binom{2n}{p} b_p = b_{2n} - \binom{2n}{1}b_1 - \binom{2n}{0}b_0 \qquad \text{(cf partie I)} \end{aligned}$$

Par ailleurs on a $b_0=1$ et $b_1=-1/2$, ce qui nous permet de conclure.

Proposition 23

$$\zeta(-11) = \frac{691}{32760}$$

4.2 hypothèse de Riemann, premiers résultats, propriétés

Après avoir prolongé la fonction ζ, l'hypothèse de Riemann s'énonce ainsi :

Les zéros non triviaux de la fonction ζ sont tous de partie réelle égale à $1/2$

Definition 12
On appelle zéro trivial de la fonction ζ, tout $-2p$ où $p \in \mathbb{N}^*$

Preuve
Pour prouver que ζ s'annule bien sur les pairs négatifs on peut se servir de son équation fonctionnelle démontrée ci-dessous en évaluant en $s = -2p$ ou $p \in \mathbb{N}^*$. C'est bien définit et le sinus annule le terme de droite, d'où le résultat.

Proposition 24 *équation fonctionnelle de ζ*
Soit $s \in \mathbb{C}\backslash\{\mathbb{N}^*\}$. Alors :

$$\zeta(s) = \Pi(-s)(2\pi)^{s-1}2\sin(s\pi/2)\zeta(1-s)$$

Lemme 4 *On définit pour $x > 0$ la fonction :*

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}$$

Alors ψ vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\frac{1+2\psi(x)}{1+2\psi(\frac{1}{x})} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Preuve

On définit la fonction suivante pour $x > 0$:

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-n^2\pi}{x}}$$

Soit $t > 0$ fixé, on définit sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{(n-x)^2}{2t})$
Soit $a < 0$. Montrons que f est de classe C^1 sur $[-a, a]$
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in [-a, a]$, on pose $u_n(x) = e^{-\frac{(n-x)^2}{2t}}$. u_n est C^1
Pour $x \in [-a, a]$, on a $u_n(x) = \exp(\frac{-n^2-x^2+2nx}{2t}) \leq \exp(\frac{-n^2+2|n|a}{2t}) = o(\frac{1}{n^2})$
Donc la fonction f est définie est continue sur $[-a, a]$ car somme d'une série de fonctions continues qui converge uniformément sur cet intervalle (les u_n)
De plus on a $|u_n'(x)| = \frac{|n-x|}{t}\exp(\frac{-n^2-xk2nx}{2t}) \leq \frac{|n|+a}{t}\exp(\frac{-n^2+2|n|a}{2t}) = o(\frac{1}{n^2})$ Donc la série des $u_n\prime$ converge normalement sur $[-a, a]$ et on en déduit que f est C^1 sur ce même intervalle et qu'on peut dériver sous le signe $\sum$. En faisant tendre a vers l'infini, on étend ce résultat à $\mathbb{R}$ tout entier.

On observe que f est une fonction $1-$périodique. Calculons maintenant ces coefficients de Fourier, soit $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \int_0^1 f(\tau)e^{-2i\pi n\tau}d\tau = \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp(-\frac{(k-\tau)^2}{2t})e^{-2i\pi n\tau}d\tau \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \exp(-\frac{(k-\tau)^2}{2t})e^{-2i\pi n\tau}d\tau = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-k}^{-k+1} \exp(-\frac{u^2}{2t})e^{-2i\pi nu}du \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2t}}e^{-2i\pi nx}dx
\end{aligned}$$

Ceci en permutant le signe $\sum$ et $\int$ par convergence normale sur $[0, 1]$ et en effectuant le changement de variable $u = \tau - k$
Pour calculer cette intégrale, calculons calculons la fontion ϕ définie pour $u \in \mathbb{R}$ par $\phi(u) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{x^2}{2t})\exp(iux)dx$
On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $g : (u, x) \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2t})\exp(iux)$.

g est continue sur $\mathbb{R}^2$ et on a $\forall (u,x)\in\mathbb{R}^2 \quad |g(u,x)|\leq \exp(\frac{x^2}{2t})$. Donc la fonction $x\mapsto g(u,x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout réel u, donc d'après la théorie de l'intégrale dépendant d'un paramètre continu, ϕ est bien définie et continue.
Pour tout réel u, g admet une dérivée partielle par rapport à u et pour $(u,x)\in\mathbb{R}^2$ on a : $|\frac{\partial g(u,x)}{\partial u}| = |x|\exp(-\frac{x^2}{2t})$
La fonction $x\mapsto \frac{\partial g(u,x)}{\partial u}$ est donc intégrable pour tout réel u et vérifie une hypothèse de domination. On en déduit, d'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$ que ϕ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\begin{aligned}\phi'(u) &= \int_{\mathbb{R}} ixe^{-\frac{x^2}{2t}}e^{iux}dx = \int_{\mathbb{R}} -ite^{iux}d[e^{-\frac{-x^2}{2t}}]\\ &= \Big[-ite^{iux}e^{-\frac{-x2}{2t}}\Big]_{-\infty}^{+\infty} - ut\phi(u) = -ut\phi(u)\end{aligned}$$

ϕ est solution de l'équation différentielle homogène, linéarie : $y'(u) = -ut\ y(u)$. Il existe donc $A\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $u\in\mathbb{R}$, $\phi(u) = Ae^{-\frac{u^2t}{2}}$. On a

$$A = \phi(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2t}}dx = \sqrt{2t}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \sqrt{2\pi t}$$

On en déduit finalement que pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f) = \phi(-2\pi n) = \sqrt{2\pi t}e^{-2n^2\pi^2 t}$
La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}$, donc d'après Dirichlet, f est égale à la somme de sa série de Fourier. En particulier on a :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{k^2}{2t}} = f(0) = \sqrt{2\pi t}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi^2n^2t}$$

A partir de là, on effectue le changement de variable $z = 2\pi t$ et on obtient $\forall z>0 \quad \theta(z) = \sqrt{z}\,\theta(\frac{1}{z})$
En remarquant que $\theta(\frac{1}{z}) = 1+2\psi(z)$ on obtient l'équation fonctionnelle recherchée.

Preuve de l'équation fonctionnelle de ζ
Soit s tel que $\Re(s)>1$ et $n\in\mathbb{N}^*$. En faisant le changement de variable $t = x/(n^2\pi)$ dans l'intégrale définissant $\Pi(s/2-1)$ on obtient :

$$\frac{1}{n^s}\pi^{-s/2}\Pi(\frac{s}{2}-1) = \int_0^\infty e^{-n^2\pi t}t^{s/2}\frac{dt}{t}$$

On somme maintenant sur tous les n ce qui nous donne :

$$\Pi(\frac{s}{2}-1)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty e^{-n^2\pi t}t^{\frac{s}{2}-1}dt$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty \Big|e^{-n^2\pi t}t^{\frac{s}{2}-1}\Big|dt &= \sum_{n=1}^\infty\int_0^\infty e^{-n^2\pi t}t^{\frac{\Re(s)}{2}-1}dt\\ &= \Pi\Big(\frac{\Re(s)}{2}-1\Big)\pi^{-\Re(s)/2}\zeta(\Re(s)) < +\infty\end{aligned}$$

On peut donc intervertir le signe $\sum$ et $\int$ et finalement :

$$\Pi(\frac{s}{2}-1)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)x^{s/2}\frac{dx}{x}$$

Montrons maintenant que le terme de droite est invariant par changement de s en $1-s$.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \psi(x)x^{s/2}\tfrac{dx}{x} &= \int_1^\infty \psi(x)x^{s/2}\tfrac{dx}{x} + \int_0^1 \psi(x)x^{s/2}\tfrac{dx}{x}\\ &= \int_1^\infty \psi(x)x^{s/2}\tfrac{dx}{x} - \int_\infty^1 \psi(1/x)x^{-s/2}\tfrac{dx}{x} \qquad \text{(changement de variable } t=1/x)\\ &= \int_1^\infty \psi(x)x^{s/2}\tfrac{dx}{x} + \int_1^\infty \Big[x^{1/2}\psi(x)+\tfrac{x^{1/2}}{2}-\tfrac{1}{2}\Big]x^{-s/2}\tfrac{dx}{x} \qquad \text{(éq. fonctionnelle de } \psi)\\ &= \int_1^\infty \psi(x)\big[x^{s/2}+x^{(1-s)/2}\big]\tfrac{dx}{x} + \tfrac{1}{2}\int_1^\infty \big[x^{-(s-1)/2}-x^{-s/2}\big]\tfrac{dx}{x}\end{aligned}$$

De plus si $a \in \mathbb{C}$ et $\Re(a) > 0$ on a $\int_1^\infty x^{-a}(dx/x) = 1/a$, d'où comme $\Re(s) > 1$, l'intégrale de droite s'écrit :

$$\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{s-1} - \tfrac{2}{s}\right] = \tfrac{1}{s(1-s)}$$

Ainsi on obtient :

$$\Pi(\tfrac{s}{2} - 1)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x)\left[x^{s/2} + x^{(1-s)/2}\right]\tfrac{dx}{x} - \tfrac{1}{s(s-1)}$$

Mais comme ψ décroît vers 0 plus rapidement que n'importe quel puissance de x quand $x \to +\infty$, l'intégrale de cette formule converge pour tout s (attendre cours intégrale pour être un peu plus propre). De plus les deux fonctions de cette égalité sont holomorphes (on utilise encore une fois le truc de domination de Lebesgue pour l'intégrale), par principe d'identité des fonctions holomorphes, cette équation reste valable pour tout s dans le domaine de définition du membre de gauche. Enfin le membre de droite est inchangé en remplaçant s par $1-s$, d'où :

$$\Pi(\tfrac{s}{2} - 1)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \Pi(-\tfrac{s+1}{2})\pi^{-(1-s)/2}\zeta(1-s)$$

Maintenant pour retrouver l'équation fonctionnelle, on se sert des propriétés de la fonction Π. On a pour $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$:

$$\Pi(-s) = 2^{-s}\Pi(-s/2)\Pi(-(s+1)/2)\pi^{-1/2} \qquad \text{et} \qquad \Pi(-s/2) = \frac{\pi s}{2\Pi(s/2)\sin(\pi s/2)}$$

En combinant ces deux relations on obtient pour $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\Pi(-s)(2\pi)^{s-1}2\sin(\frac{\pi s}{2}) &= \frac{2^{-s}\pi s\Pi(-\frac{(s+1)}{2})\pi^{1/2}(2\pi)^{s-1}2\sin(\pi s/2)}{2\Pi(\frac{s}{2})\sin(\pi s/2)} \\
&= \frac{s\Pi(-\frac{(s+1)}{2})\pi^{s-\frac{1}{2}}}{2\Pi(\frac{s}{2})} = \frac{\Pi(-\frac{(s+1)}{2})\pi^{s-\frac{1}{2}}}{\Pi(\frac{s}{2}-1)} \\
&= \frac{\zeta(s)}{\zeta(s-1)}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve (l'equation fonctionnelle est encore vrai pour $s \in \mathbb{Z}_-^*$ par principe d'identité des fonctions holomorphes).

Proposition 25 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors*

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1}b_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}$$

Preuve

Le résultat est immédiat en évaluant l'équation fonctionnelle avec $s = 1 - 2n$.

5 Localisation de zéros non triviaux de ζ

Pour localiser les zéros non triviaux de ζ, il faut être capable de calculer (de manière approchée) Π et ζ. Pour cela on se sert de la formule d'Euler Maclaurin.

5.1 évaluation de Π

Pour évaluer $\Pi(s)$, il suffit d'évaluer $\log\Pi(s)$. Soit $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. Pour calculer $\log\Pi(s)$, on part de la formule de Stirling :

$$\log\Pi(z) = (z + \frac{1}{2})\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) - \int_0^{+\infty}\frac{B_1^*(t)}{z+t}dt$$

En intégrant par partie le dernier terme de la même manière que dans la formule d'Euler MacLaurin, il vient :

$$\log\Pi(z) = (z + \frac{1}{2})\log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{b_2}{2z} + \frac{b_4}{4\cdot 3\cdot z^3} + \cdots + \frac{b_{2p}}{2p(2p-1)z^{2p-1}} + R_{2p}$$

où

$$R_{2p} = -\int_0^\infty \frac{B_{2p}^*(t)dt}{2p(z+t)^{2p}} = -\int_0^\infty \frac{B_{2p+1}^*(t)dt}{(2p+1)(z+t)^{2p+1}}$$

Cette formule porte le nom de série de Stirling et est très efficace pour donner une valeur approchée de $\Pi(s)$. Une fois $\log \Pi(s)$ calculé, on peut avoir une valeur de $\Pi(s)$ en passant à l'exponentielle.

(attention, préciser que $\log \Pi(s)$ est bien défini !)

Maintenant majorons $|R_{2p}|$.
On part de :

$$R_{2p-2} = -\int_0^\infty \frac{B^*_{2p-1}(t)dt}{(2p-1)(s+t)^{2p-1}}$$

On intègre par partie en prenant $\frac{1}{2p}(B^*_{2p}(t) - b_{2p})$ comme primitive de $B^*_{2p-1}(t)$ qui s'annule en 0. On obtient :

$$R_{2p-2} = -\int_0^\infty \frac{\big(B^*_{2p}(t) - b_{2p}\big)dt}{2p(s+t)^{2p}}$$

(Cela est encore valable dans le cas $p = 1$, avec B^*_{2p-1} discontinue, en écrivant R_{2p-2} comme somme d'intégrale, de bornes les points de discontinuité).
On obtient ainsi la première inégalité :

$$|R_{2p-2}| \leqslant \int_0^\infty \frac{\big|B^*_{2p}(t) - b_{2p}\big|dt}{2p|s+t|^{2p}}$$

Les propriétés des nombres et polynômes de Bernoulli nous donnent que $B^*_{2p}(t) - b_{2p}$ est de signe constant, et comme $b_{2p}(-1)^{P+1} > 0$, on a que $\big|B^*_{2p}(t) - b_{2p}\big| = (-1)^{p+1}\big(b_{2p} - B^*_{2p}(t)\big)$.
D'autre part, $|s+t|(|s|+t)^{-1}$ atteint son minimum, pour $t \geq 0$ et $s = re^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$, à $t = |s|$ ce qui correspond à $\cos(\theta/2)$.
(Pour montrer cela, on étudie les variations de : $f(t) = \frac{|s+t|}{|s|+t} = \frac{\sqrt{|s|^2+(s+\bar{s})t+t^2}}{|s|+t}$).On peut donc écrire $\frac{1}{|s+t|} = \frac{1}{|s|+t} \cdot \frac{|s|+t}{|s+t|} \leqslant \frac{1}{(|s|+t)\cos(\theta/2)}$, et en injectant dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
|R_{2p-2}| &\leqslant \int_0^\infty \frac{(-1)^{p+1}\big(b_{2p} - B^*_{2p}(t)\big)dt}{2p\cos^{2p}(\theta/2)(|s|+t)^{2p}} \\
&= \int_0^\infty \frac{(-1)^{p+1}b_{2p}dt}{2p\cos^{2p}(\theta/2)(|s|+t)^{2p}} - \int_0^\infty \frac{(-1)^{p+1}B^*_{2p}(t)dt}{2p\cos^{2p}(\theta/2)(|s|+t)^{2p}} \\
&= \frac{1}{\cos^{2p}(\theta/2)} \cdot \frac{|b_{2p}|}{2p(2p-1)|s|^{2p-1}} - \frac{1}{\cos^{2p}(\theta/2)} \int_0^\infty \frac{(-1)^{p+1}B^*_{2p+1}(t)dt}{(2p+1)(|s|+t)^{2p+1}}
\end{aligned}$$

Montrons que l'intégrale de droite est positive. On pose $v_k = \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \frac{B^*_{2p+1}(t)dt}{(|s|+t)^{2p}}$.
On a ainsi :

$$\int_0^\infty \frac{B^*_{2p+1}(t)dt}{(|s|+t)^{2p}} = \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

Montrons que cette série vérifie le critère spécifique des séries alternées.
D'après les propriétés de B_{2p+1}, on a B^*_{2p+1} de signe constant et opposé sur $[k/2,(k+1)/2]$ et $[(k+1)/2, k/2+1]$, donc $(v_k)_k$ est alternée. Montrons que $(|v_k|)_k$ décroît.
Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
|v_{k+1}| &= \int_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k+2}{2}} \frac{|B^*_{2p+1}(t)|dt}{(|s|+t)^{2p}} \qquad \text{on pose } u = k+1-t \\
&= -\int_{\frac{k+1}{2}}^{\frac{k}{2}} \frac{|B^*_{2p+1}(k+1-u)|du}{(|s|+k+1-u)^{2p}} = \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \frac{|B^*_{2p+1}(u)|du}{(|s|+k+1-u)^{2p}}
\end{aligned}$$

Or si $u \leqslant (k+1)/2$, alors $|s| + u \leqslant |s| + k + 1 - u$. D'où

$$|v_{k+1}| = \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \frac{|B^*_{2p+1}(u)|du}{(|s|+k+1-u)^{2p}} \leqslant \int_{\frac{k}{2}}^{\frac{k+1}{2}} \frac{|B^*_{2p+1}(u)|du}{(|s|+u)^{2p}} = |v_k|$$

$(|v_k|)_k$ est décroissante, donc $(v_k)_k$ vérifie le critère spécifique des séries alternées et $\int_0^\infty \frac{(-1)^{p+1}B^*_{2p+1}(t)dt}{(2p+1)(|s|+t)^{2p})}$ est du signe de $(-1)^{p+1}v_0$.
Or $(-1)^{p+1}B^*_{2p+1}(0) = 0$ et $(-1)^{p+1}\big(B^*_{2p+1}\big)'(0) = (-1)^{p+1}(2p+1)b_{2p} > 0$, donc $(-1)^{p+1}v_0 \geqslant 0$ et on en déduit le signe de l'intégrale. On arrive donc à l'égalité suivante :

$$|R_{2p-2}| \leq \Big(\frac{1}{\cos(\theta/2)}\Big)^{2p}\Big|\frac{b_{2p}}{2p(2p-1)s^{2p-1}}\Big|$$

Proposition 26 *[série de Stirling]*
Soit $s \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. Alors

$$\log \Pi(s) = (s+\frac{1}{2})\log s - s + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{b_2}{2s} + \frac{b_4}{4\cdot 3\cdot s^3} + \cdots + \frac{b_{2p}}{2p(2p-1)s^{2p-1}} + R_{2p}$$

où

$$R_{2p} = -\int_0^\infty \frac{B_{2p}^*(t)dt}{2p(s+t)^{2p}} = -\int_0^\infty \frac{B_{2p+1}^*(t)dt}{(2p+1)(s+t)^{2p+1}}$$

On appelle b_{2p}-terme, le terme en $s^{-(2p-1)}$.

Proposition 27 *Des calcul précédents on peut tirer la propriété suivante : Si $\Re(s) > 0$, alors*
Si b_{2p}-terme est le premier terme négligé dans la série de Stirling, alors l'erreur commise est plus petite que $\cos^{-2p}(\theta/2)$ fois la valeur absolue de ce terme.

5.2 évaluation de ζ

Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$. Pour évaluer $\zeta(s)$, on applique la formule d'Euler MacLaurin à la série $\sum_N^\infty n^{-s}$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On obtient ainsi :

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^{N-1} n^{-s} = \sum_{n=N}^{\infty} n^{-s} = \int_N^\infty x^{-s}dx + \frac{1}{2}N^{-s} + \int_N^\infty \frac{(-s)B_1^*(x)dx}{x^{s+1}}$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N-1} n^{-s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2}N^{-s} + \sum_{k=1}^{p} \frac{b_{2k}}{(2k)!}s(s+1)\dots(s+2k-2)N^{-s-2k+1} + R_{2p}$$

où :

$$\begin{aligned} R_{2p} &= -\frac{s(s+1)\dots(s+2p-1)}{(2p)!}\int_N^\infty B_{2p}^*(x)x^{-s-2p}dx \\ &= -\frac{s(s+1)\dots(s+2p)}{(2p+1)!}\int_N^\infty B_{2p+1}^*(x)x^{-s-2p-1}dx \end{aligned}$$

Maintenant, essayons de majorer le reste. On applique la même méthode que pour Π :

$$\begin{aligned} |R_{2p-2}| &= \Big|\frac{s(s+1)\dots(s+2p-2)}{(2p-1)!}\int_N^\infty B_{2p-1}^*(x)x^{-s-2p+1}dx\Big| \\ &= \Big|\frac{s(s+1)\dots(s+2p-1)}{(2p)!}\int_N^\infty \big(b_{2p} - B_{2p}^*(x)\big)x^{-s-2p}dx\Big| \\ &\leqslant \Big|\frac{s(s+1)\dots(s+2p-1)}{(2p)!}\Big|\int_N^\infty (-1)^{p+1}\big(b_{2p} - B_{2p}^*(x)\big)x^{-\sigma-2p}dx \\ &= \Big|\frac{s(s+1)\dots(s+2p-1)}{(2p)!}\Big||b_{2p}|\int_N^\infty x^{-\sigma-2p}dx \\ &\quad - \Big|\frac{s(s+1)\dots(s+2p-1)}{(2p)!}\Big|\int_N^\infty \frac{\sigma+2p}{2p+1}(-1)^{p+1}B_{2p+1}^*(x)x^{-\sigma-2p-1}dx \end{aligned}$$

Où on a posé $\sigma = \Re(s)$.
Par un calcul indentique à celui fait pour le reste de $\Pi(s)$, on a que l'intégrale contenant $B_{2p+1}^*(x)$ est positive, donc on peut écrire :

$$|R_{2p-2}| \le \Big|\frac{s(s+1)\dots(s+2p-1)b_{2p}N^{-\sigma-2p+1}}{(2p)!(\sigma+2p-1)}\Big| = \Big|\frac{s+2p-1}{\sigma+2p-1}\Big||b_{2p} - terme|$$

Pour ces calculs, on avait supposé $\Re(s) > 1$, mais ils restent valables dès que le reste R_{2p} converge, ce qui est le cas dès que p est assez grand, donc par prolongement analytique, l'inégalité reste valable $\forall s \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ (avec p assez grand). On peut ainsi calculer $\zeta(s)$.

Proposition 28 *On appelle b_{2p}-terme le terme contenant b_{2p} dans la formule :*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N-1} n^{-s} + \tfrac{N^{1-s}}{s-1} + \tfrac{1}{2}N^{-s} + \sum_{k=1}^{p} \tfrac{b_{2k}}{(2k)!} s(s+1)\dots(s+2k-2)N^{-s-2k+1} + R_{2p}$$

On peut résumer les calculs précédents ainsi :

Si b_{2p}-terme est le premier terme négligé, alors l'erreur commise est plus petite que $\frac{s+2p-1}{\sigma+2p-1}$ fois la valeur absolue de ce terme.

Cette formule est très efficace, nous nous en servirons dans la suite.

(mettre un exemple en annexe ?)

5.3 localisation des zéros sur la droite critique

Pour localiser les zéros non triviaux de ζ, on se sert d'une nouvelle fonction ξ qui a les mêmes zéros que la fonction zêta et qui est à valeurs réelles sur la droite critique.

Definition 13
Soit $s \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-$. On définit la fonction ξ par :

$$\xi(s) = \Pi(\frac{s}{2})\pi^{-s/2}(s-1)\zeta(s)$$

On peut calculer de manière approchée $\xi(s)$ en combinant les deux résultats démontrés précédemment.

Proposition 29 *1. ξ vérifie l'équation fonctionnelle : $\xi(s) = \xi(s-1)$*

2. $\xi(s) = \frac{1}{2} - \frac{s(1-s)}{2} \int_1^\infty \psi(x)\left[x^{s/2} + x^{(1-s)/2}\right] \frac{dx}{x}$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors $\xi(\frac{1}{2} + it) \in \mathbb{R}$

4. ξ a les mêmes zéros que ζ sur la droite critique

Preuve
Pour 2.Soit $s \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-$
On part de la preuve de l'équation fonctionnelle de ζ, on avait :

$$\Pi(\tfrac{s}{2} - 1)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x)\left[x^{s/2} + x^{(1-s)/2}\right] \tfrac{dx}{x} - \tfrac{1}{s(1-s)}$$

On multiplie par $\frac{s(s-1)}{2}$, ce qui fournit le résultat.
Pour 1.
Corollaire immédiat de 2. : le membre de droite est inchangé par substitution de s en $1-s$
Pour 3.
Soit $\sigma,\ t \in \mathbb{R}$. D'après 2. on a $\overline{\xi(\sigma + it)} = \xi(\sigma - it)$. Et d'après 1. on a $\xi(\sigma - it) = \xi(1 - \sigma + it)$. Ainsi $\overline{\xi(\frac{1}{2} + it)} = \xi(\frac{1}{2} + it)$, ce qui prouve que $\xi(\frac{1}{2} + it)$ est réel.
Pour 4.
On avait montré que Π n'a pas de zéro.

Comme ξ est continue et à valeurs réelles sur la droite critique, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et localiser les zéros de ζ en fonction du changement de signe de $\xi(\frac{1}{2} + it)$.
Pour cela, on peut récrire $\xi(\frac{1}{2} + it)$ sous la forme (en posant $s = \frac{1}{2} + it$) :

$$\begin{aligned}
\xi(\frac{1}{2} + it) &= \frac{s}{2}\Pi(\frac{s}{2} - 1)\pi^{-s/2}(s-1)\zeta(s) \\
&= e^{\log \Pi(s/2-1)}\pi^{-s/2} \cdot \frac{s(s-1)}{2}\zeta(s) \\
&= \left[e^{\Re \log \Pi(s/2-1)}\pi^{-1/4} \cdot \frac{-t^2 - \frac{1}{4}}{2}\right] \times \left[e^{i\mathrm{Im} \log \Pi(s/2-1)}\pi^{-it/2} \cdot \zeta(s)\right]
\end{aligned}$$

On peut remarquer que le premier facteur est un réel strictement négatif. Donc le signe de $\xi(\frac{1}{2}+it)$ est l'opposé du signe du deuxième facteur.

Definition 14
Soit $t \in \mathbb{R}$. On définit :

$$\vartheta(t) = \operatorname{Im} \log \Pi(\frac{it}{2} - \frac{3}{4}) - \frac{t}{2}\log \pi$$

et

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\frac{1}{2}+it)$$

D'après les calculs précédents, le signe de $\xi(\frac{1}{2}+it)$ est l'opposé de celui de $Z(t)$. Donc pour calculer le signe de $\xi(\frac{1}{2}+it)$, on calcule $\vartheta(t)$ et $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ par les méthodes explicitées précedemment.
Donnons une forme plus explicite de $\vartheta(t)$ à l'aide de la série de Stirling :

$$\begin{aligned}
\vartheta(t) &= \operatorname{Im}\Big[\log\Pi(\frac{it}{2}+\frac{1}{4}) - \log(\frac{it}{2}+\frac{1}{4})\Big] - \frac{t}{2}\log\pi \\
&= \operatorname{Im}\Big[(\frac{it}{2}-\frac{1}{4})\log(\frac{it}{2}+\frac{1}{4}) - (\frac{it}{2}+\frac{1}{4}) + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{12(\frac{it}{2}+\frac{1}{4})} - \frac{1}{360(\frac{it}{2}+\frac{1}{4})^3} + \dots\Big] - \frac{t}{2}\log\pi \\
&= \frac{t}{2}\Re\log(\frac{it}{2}+\frac{1}{4}) - \frac{1}{4}\operatorname{Im}\log(\frac{it}{2}+\frac{1}{4}) - \frac{t}{2} + \frac{\frac{-t}{2}}{12(\frac{t^2}{4}+\frac{1}{16})} - \frac{\operatorname{Im}(\frac{it}{2}+\frac{1}{4})^3}{360(\frac{t^2}{4}+\frac{1}{16})^3} + \dots - \frac{t}{2}\log\pi
\end{aligned}$$

On peut remarquer que :

$$\log(\frac{it}{2}+\frac{1}{4}) = \log\left|\frac{it}{2}+\frac{1}{4}\right| + i\arg\left(\frac{it}{2}+\frac{1}{4}\right) = \log\Big((\frac{t^2}{2})(1+\frac{1}{4t^2})\Big)^{1/2} + i\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1/4}{t/2})\Big)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\vartheta(t) &= \frac{t}{2}\log\Big((\frac{t^2}{2})(1+\frac{1}{4t^2})\Big)^{1/2} - \frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{1/4}{t/2})\Big) - \frac{t}{2} - \frac{1}{6t(1+\frac{1}{4t^2})} \\
&\quad - \frac{\frac{t^3}{8} + 3(-\frac{t}{2})(\frac{1}{4})^2}{360(\frac{t^2}{4})^3(1+\frac{1}{4t^2})^3} + \dots - \frac{t}{2}\log\pi \\
&= \frac{t}{2}\log\frac{t}{2} + \frac{t}{4}\log(1+\frac{1}{4t^2}) - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\arctan(\frac{1}{2t}) - \frac{t}{2} - \frac{1}{6t}(1+\frac{1}{4t^2})^{-1} \\
&\quad - \frac{1}{45t^3}(1+\frac{1}{4t^2})^{-3} + \frac{1}{60t^5}(1+\frac{1}{4t^2})^{-3} + \dots - \frac{t}{2}\log\pi \\
&= \frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi} + \frac{t}{4}\Big[\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{2}(\frac{1}{4t^2})^2 + \dots\Big] - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2t} - \frac{1}{3}(\frac{1}{2t})^3 + \dots\Big] \\
&\quad - \frac{t}{2} - \frac{1}{6t}\Big[1 - \frac{1}{4t^2} + \dots\Big] - \frac{1}{45t^3}\Big[1 - \frac{3}{4t^3}\Big] - \frac{1}{60t^5}(1+\frac{1}{4t^2})^{-3} + \dots
\end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\vartheta(t) = \frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48t} + \frac{7}{5760t^3} + \dots$$

Calculons l'erreur (on prendra $t \geq 0$)
L'incertitude provenant de la série de Stirling est inférieur à :

$$\frac{1}{\cos^6\frac{\theta}{2}} \cdot \left|\frac{1}{42\cdot 6\cdot 5(\frac{it}{2}+\frac{1}{4})^5}\right|$$

Mais comme $\theta = arg(\frac{it}{2}+\frac{1}{2})$, on a que $\cos\theta > 0$

D'où $\cos^6\frac{\theta}{2} = (\frac{1+\cos\theta}{2})^3 \geq \frac{1}{2^3}$.

De plus $\left|\frac{it}{2}+\frac{1}{4}\right| = \frac{t}{2}(1+\frac{1}{4t^2})^{1/2} \geq \frac{t}{2}$.
Donc finalement on obtient :

$$\frac{1}{\cos^6\frac{\theta}{2}} \cdot \left|\frac{1}{42\cdot 6\cdot 5(\frac{it}{2}+\frac{1}{4})^5}\right| \leq \frac{1}{t^5}\frac{2^3}{42\cdot 6\cdot 5(\frac{1}{2})^5} \leq \frac{1}{2t^5}$$

Les autres séries intervenant vérifient toutes le critère spécifique des séries alternées, donc leur reste est inférieur au premier terme négligé. Elles apportent donc une incertitude de :

(peut-être justifier rapidement que arctan est DSE)

$$\frac{t}{4}\cdot\frac{1}{3}(\frac{1}{4t^2})^3+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}(\frac{1}{2t})^5+\frac{1}{6t}(\frac{1}{4t^2})^2+\frac{1}{45t^3}(\frac{3}{4t^2})+\frac{1}{60t^5}<\frac{1}{2t^5}$$

Proposition 30 *Soit $t\in\mathbb{R}^+$. Alors*

$$\vartheta(t)=\frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{48t}+\sigma(t)$$

Avec

$$|\sigma(t)|\leq\frac{7}{5760t^3}+\frac{1}{t^5}$$

On pourrait bien sûr calculer $\vartheta(t)$ avec plus de précision en comptant d'avantage de terme de la série de Stirling, mais ceci est suffisant pour la localisation des zéros.

5.4 preuve de l'existence d'un zéro de partie réelle égale à 1/2

Les "courbes" (puisqu'il s'agit en réalité d'un ensemble fini de points) tracées en annexe suggèrent de rechercher un zéro de partie imaginaire proche de 14.

Avant de se lancer dans les calculs, faisons la remarque suivante :

$$\zeta(\frac{1}{2}+it)=e^{-i\vartheta(t)}Z(t)=Z(t)\cos\vartheta(t)-iZ(t)\sin\vartheta(t)$$

Et la fonction Z est à valeurs réelles. On a donc

$$\mathrm{Im}\Big(\zeta(\frac{1}{2}+it)\Big)=-Z(t)\sin\vartheta(t)$$

Un changement de signe de la partie imaginaire de ζ implique donc un changement de signe de Z ou $\sin(\vartheta)$. Ces remarque nous ferons gagner du temps de calcul.
En effet, sur le segment $[|14,14.2|]$ la fonction ϑ considérée sans erreur est croissante. Un bref calcul nous affirme que l'erreur commise est de l'ordre de 10^{-5} sur ce même intervalle. On en déduit l'inégalité suivante :

$$-1,785<\vartheta(t)<-1,702$$

Or $\pi/2<1,702<1,785<\pi$ et la fonction sin est décroissante sur $[|\pi/2,\pi|]$. On en déduit que

$$|\sin\vartheta(t)|\geq\sin(1,785)\geq 0,97\qquad\text{ce qui est très éloigné de 0}$$

Donc $\sin(\theta)$ garde un signe constant sur cet intervalle. Par le calcul (en utilisant les formules énoncées précédemment), à 10^{-3} près on trouve :

$$\mathrm{Im}\Big(\zeta(\frac{1}{2}+14i)\Big)\approx-0,103\quad\text{et}\quad\mathrm{Im}\Big(\zeta(\frac{1}{2}+14,2i)\Big)\approx 0,052$$

Donc

$$\mathrm{Im}\Big(\zeta(\frac{1}{2}+14i)\Big)<0<\mathrm{Im}\Big(\zeta(\frac{1}{2}+14,2i)\Big)$$

$\mathrm{Im}\zeta$ change de signe sur $[|14,14.2|]$, donc comme $\sin\vartheta$ garde un signe constant, nécessairement Z change aussi de signe sur cet intervalle donc s'annule. Donc ξ s'annule sur $[|14,14.2|]$ et finalement ζ possède bien un zéro de partie réelle égale à 1/2 et de partie imaginaire proche de 14. En affinant par dichotomie l'intervalle précédent, on peut approcher plus précisémment la partie imaginaire de ce zéro. En notant α_1 sa partie imaginaire, on a à 10^{-14} près (calcul effectué par Maple, c'est la précision maximale que j'ai pu obtenir) :

$$\alpha_1=14,13472514173469$$